

## FÍSICA (INFORMÁTICA DE GESTIÓN)

Febrero de 2001

SOLUCIONES

Primera vuelta

### PROBLEMA 1.1.1

En el espacio hay un campo electrostático  $\mathbf{E} = E_o \mathbf{u}_x$ . Calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B a través del camino indicado en la figura P1.1.1, así como entre los puntos A y C.

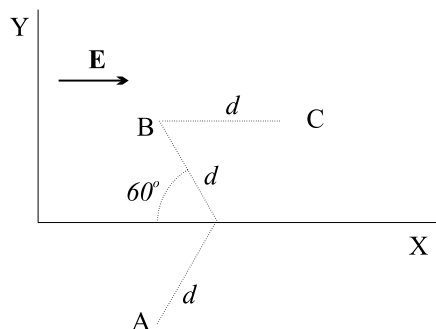


Figura P1.1.1

### Solución

Puesto que el campo es uniforme en la dirección  $\mathbf{u}_x$ , las superficies equipotenciales serán planos paralelos al plano ZY. Por tanto, A y B se encuentran en la misma superficie equipotencial y la diferencia de potencial es nula

$$V_{AB} = 0$$

Pero, podemos obtenerla integrando a través del camino indicado en la figura

$$V_{AB} = V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Si llamamos O al punto del camino sobre el eje X, tendremos

$$V_{AB} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \left[ \int_A^O E_o \mathbf{u}_x \cdot (dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y) + \int_O^B E_o \mathbf{u}_x \cdot (dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y) \right]$$

$$V_{AB} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \left[ \int_{x_o}^{x_o + d \cos 60} E_o dx + \int_{x_o + d \cos 60}^{x_o} E_o dx \right]$$

$$V_{AB} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - [E_o d \cos 60 - E_o d \cos 60] = 0$$

La diferencia de potencial entre A y C será igual a la diferencia de potencial entre B y C. Así pues

$$V_{AC} = V_{BC} = V_C - V_B = - \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$V_{AC} = V_C - V_A = - \int_B^C E_o \mathbf{u}_x \cdot dx \mathbf{u}_x = - \int_{x_o}^{x_o+d} E_o dx = -E_o d$$

La diferencia de potencial es negativa porque el campo va hacia los potenciales decrecientes y por tanto, el punto C está a un potencial más bajo que el A.

### PROBLEMA 1.1.2

Dado el circuito que muestra la figura P1.1.2, calcular el circuito equivalente Thévenin visto desde los puntos A B.

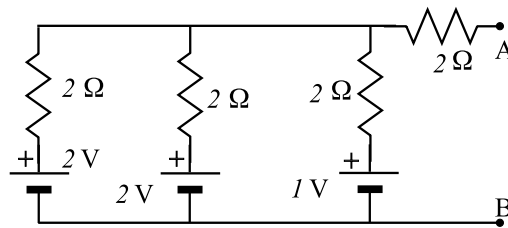


Figura P1.1.2

### Solución

En primer lugar, dado que la tercera malla está abierta, resolvemos el circuito de dos lazos aplicando el método de mallas.

$$\begin{aligned} 2 - 2 &= 4I_1 - 2I_2 \\ 2 - 1 &= -2I_1 + 4I_2 \end{aligned}$$

de donde

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad ; \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

La tensión equivalente Thévenin será

$$E_o = V_A - V_B = 2I_2 + 1 = \frac{5}{3} \text{ V}$$

O bien

$$E_o = V_A - V_B = 2 - 2I_1 = \frac{5}{3} \text{ V}$$

Y la resistencia Thévenin se obtiene cortocircuitando los generadores y obteniendo la resistencia equivalente del conjunto: un paralelo de tres resistencias de 2 ohmios en serie con una resistencia de 2 ohmios

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

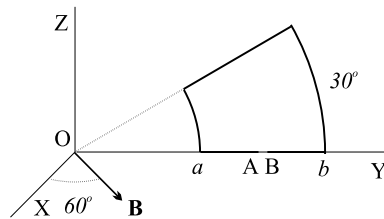
$$R_1 = \frac{2}{3}$$

Y finalmente

$$R_o = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \Omega$$

### PROBLEMA 1.1.3

En la figura P1.1.3 se muestra una espira con dos tramos rectos y dos arcos de circunferencia. La espira está en presencia de un campo magnético cuyo módulo es  $B = B_o \cos \omega t$ . Dicho campo forma un ángulo de  $60^\circ$  con el eje X. Calcular la f.e.m. inducida en la espira.



**Figura P1.1.3**

### Solución

En primer lugar hay que determinar el flujo magnético que atraviesa la espira. Teniendo en cuenta que el campo magnético forma un ángulo de  $60^\circ$  con el eje X, su expresión vectorial en coordenadas cartesianas será

$$\mathbf{B} = B_o \cos \omega t (\cos 60 \mathbf{u}_x + \text{sen } 60 \mathbf{u}_y)$$

Por otro lado, puesto que el campo es uniforme, el flujo vendrá dado por

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$$

Es decir, es igual al producto escalar del campo magnético por la superficie de la espira, siendo ésta la superficie del sector de corona circular,

$$S = \int_0^{\pi/6} \int_a^b \rho d\varphi d\rho = \frac{\pi}{12}(b^2 - a^2)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\pi}{12}(b^2 - a^2)\mathbf{u}_x$$

Así pues,

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B_o \cos \omega t (\cos 60^\circ \mathbf{u}_x + \sin 60^\circ \mathbf{u}_y) \cdot \frac{\pi}{12}(b^2 - a^2)\mathbf{u}_x$$

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B_o \cos \omega t \cos 60^\circ \frac{\pi}{12}(b^2 - a^2) (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x)$$

Sustituyendo  $\cos 60^\circ = 1/2$ , obtenemos finalmente,

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{\pi}{24}(b^2 - a^2)B_o \cos \omega t$$

Y la f.e.m. inducida será,

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(-\frac{\pi}{24}(b^2 - a^2)B_o\omega \sin \omega t\right) = \frac{\pi}{24}(b^2 - a^2)B_o\omega \sin \omega t$$

## Segunda vuelta

### PROBLEMA 1.2.1

Tenemos una batería  $V_o$  unida a un sistema de condensadores dispuesto como indica la figura P1.2.1. Inicialmente el interruptor S está abierto. En un instante dado se cierra el interruptor. Calcular la carga en los condensadores así como la carga total almacenada por el sistema antes y después de cerrar el interruptor.

$$C_1 = 1 \mu\text{F}. \quad C_2 = 0,5 \mu\text{F}. \quad C_3 = C_2 = 0,5 \mu\text{F}. \quad V_o = 10 \text{ V}.$$

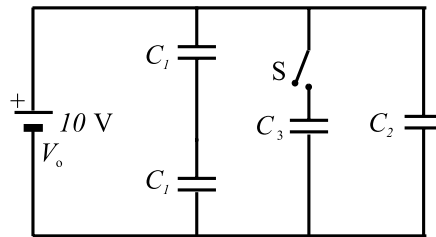


Figura P1.2.1

### Solución

1) *Antes de cerrar el interruptor S*

Los condensadores  $C_1$  de la rama izquierda están en serie, por tanto tienen la misma carga  $Q_1$ . Por tanto se cumple que,

$$V_o = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_1}{C_1} = 2 \frac{Q_1}{C_1} \rightarrow Q_1 = \frac{1}{2} C_1 V_o$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} 10 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ (C)}$$

En el condensador  $C_2$  se verifica que,

$$V_o = \frac{Q_2}{C_2} \rightarrow Q_2 = C_2 V_o = 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ (C)}$$

La carga inicial antes de cerrar S será,

$$Q_i = Q_1 + Q_2 = 10^{-5} \text{ (C)}$$

1) *Después de cerrar S*

La carga de los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  no cambia, por tanto sólo calculamos la carga en  $C_3$ .

$$V_o = \frac{Q_3}{C_3} \rightarrow Q_3 = C_3 V_o$$

$$Q_3 = 10 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-6} \quad (\text{C})$$

La carga total después de cerrar S será,

$$Q_f = 5 \cdot 10^{-6} + 10^{-5} = 15 \cdot 10^{-6} \quad (\text{C})$$

### PROBLEMA 1.2.2

En la figura P1.2.2 se muestra un conductor con tramos rectos y circulares por el que circula una corriente  $I$ . Calcular el campo magnético creado en el origen de coordenadas.

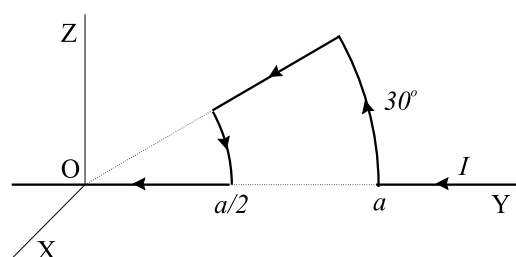


Figura P1.2.2

### Solución

#### 1) Tramos rectos

En la figura vemos que hay dos tramos rectos y dos arcos de circunferencia de  $30^\circ$ . Los tramos rectos están alineados con el origen de coordenadas. En los que está sobre el eje Y se verifica que,

$$\mathbf{r} = 0 \quad ; \quad \mathbf{r}' = y \mathbf{u}_y \quad ; \quad d\mathbf{l} = dy \mathbf{u}_y$$

por tanto  $d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = dy \mathbf{u}_y \times (-y \mathbf{u}_y) = 0$ . Es decir, estos dos tramos no contribuyen al campo en O.

De forma análoga se puede demostrar que en el tramo recto que forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje Y el producto vectorial  $d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$ , ya que dicho tramo está alineado con el punto O, por tanto no contribuye al campo en O.

#### 2) Tramos circulares

Para calcular el campo magnético en O debido a los tramos circulares aplicamos el método desarrollado en el ejemplo 6.2, página 222, del libro *Física para Informática* (V. López y M.M. Montoya). En este caso se pone como eje perpendicular a la circunferencia el eje X, por tanto,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^\varphi \frac{I R^2 d\varphi}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x$$

El ángulo que forman los dos arcos de circunferencia es  $\varphi = \pi/6 = 30^\circ$ . El eje ahora es el X, y como el punto donde se calcula el campo es el origen de coordenadas,  $x = 0$ .

Para el arco de radio  $R = a/2$ , la regla del tornillo determina que el sentido del campo es el de  $-\mathbf{u}_x$ , por tanto,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{\pi/6} \frac{I (a/2)^2 d\varphi}{(0^2 + (a/2)^2)^{3/2}} (-\mathbf{u}_x) = -\frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{\pi}{6} \frac{2}{a} \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_o I}{12 a} \mathbf{u}_x$$

En arco de radio  $R = a$  la corriente tiene sentido contrario al caso anterior, por tanto el sentido de  $\mathbf{B}$  es el de  $\mathbf{u}_x$ . Dicha corriente crea en O el siguiente campo magnético,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{\pi/6} \frac{I (a)^2 d\varphi}{(0^2 + (a)^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{\pi}{6} \frac{1}{a} \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o I}{24 a} \mathbf{u}_x$$

El campo total será,

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_o I}{24 a} \mathbf{u}_x$$

### PROBLEMA 1.2.3

La figura P1.2.3 muestra un circuito alimentado por un generador de corriente alterna  $V_o = 10 \text{ V}$ . Calcular la diferencia de potencial entre los bornes AB.

$\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$ .  $R = 10 \Omega$ .  $C_1 = 10 \mu\text{F} = 10^{-5} \text{ F}$ .  $L = 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H}$ .  $C_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ F}$ .

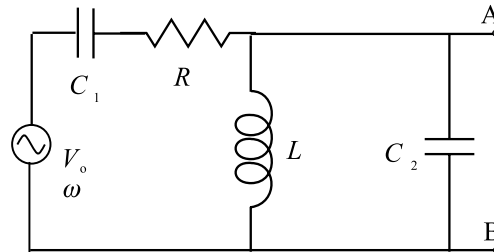


Figura P1.2.3

### Solución

Teniendo en cuenta los valores de  $\omega$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C_1$  y  $C_2$ ,

$$R = 10 \ \Omega$$

$$X_L = \omega L = 10^4 \cdot 10^{-3} = 10 \ \Omega ; \quad X_1 = -\frac{1}{\omega C_1} = -\frac{1}{10^4 \cdot 10^{-5}} = -10 \ \Omega$$

$$X_2 = -\frac{1}{\omega C_2} = -\frac{1}{10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = -5 \ \Omega$$

Con los valores obtenidos calculamos las impedancias respectivas.  
La resistencia y el condensador en serie dan lugar a la impedancia  $\mathbf{Z}_1$ .

$$\mathbf{Z}_1 = R + jX_1 = 10 - j10 \ \Omega$$

La inductancia y el condensador  $C_2$  en paralelos componen  $\mathbf{Z}_2$ .

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{jX_2} = \frac{1}{j10} + \frac{1}{-j5} = \frac{j5}{50} = \frac{j}{10}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{10}{j} = -j10 \ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 10 - j20 \ \Omega$$

La corriente que circula por la resistencia  $R$  es,

$$\mathbf{I} = \frac{V_o}{\mathbf{Z}_T} = \frac{10}{10 - j20} = \frac{1}{1 - j2} = \frac{1 + j2}{5}$$

La diferencia de potencial entre los puntos AB será,

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}_2 = \frac{1 + j2}{5}(-j10) = 4 - j2$$

Su módulo es,

$$V_{AB} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ (V)}$$

La fase,

$$\tan \theta = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \rightarrow \theta = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq -26,56^\circ$$